Hilfe zur Vorbereitung auf die

Zentrale Klassenarbeit Mathematik

Jahrgangsstufe 10 (Baden-Württemberg und Auslandsschulen)

Wenn du dieses Dokument in schwarz-weiß kopierst zeichne am besten die Graphen farbig nach.

Zum Download auf:

http://thomasprofesoraleman.com/mathematik/zentrale-klassenarbeiten/

Diese Hilfe zur Vorbereitung auf die Klausur habe ich mit größter Vorsicht und Sorgfalt angefertigt. Trotzdem ist es nicht vollkommen unmöglich dass sich vielleicht noch irgendein Fehler darin befindet. Für etwaige daraus entstehende Folgen kann ich leider nicht haften.

Wenn Du einen Fehler gefunden hast bin ich dir für einen Hinweis sehr dankbar.

VORWORT: Wenn man sich die vergangenen Klassenarbeiten anschaut sieht man, dass sich gleiche Aufgabentypen oft wiederholen. Ich möchte euch hier zu jedem Typ ein paar Tipps geben.

Die Typen sind:

A) Kurven zuordnen und charakteristische Punkte finden

B) Zinseszinsen

C) Flächen- und Volumenberechnung

D) Wahrscheinlichkeitsrechnung

A) Kurven zuordnen und charakteristische Punkte finden

Mehrere Gleichungen und mehrere Graphen sind gegeben und sollen zugeordnet werden:

Generellen Verlauf anschauen:

Eine Gerade: Geradengleichung **f(x) = m·x+b**, b ist der Y-Achsenabschnitt und somit direkt abzulesen, das m berechnet sich über ein Steigungsdreieck

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

y und x können beliebig auf der Geraden gewählt werden, am besten jedoch Werte die genau auf einem Kreuz des karierten Papiers liegen und im positiven Bereich damit man nicht mit den Vorzeichen durcheinander kommt.

Eine ganzrationale Funktion $ax^n+bx^{n-1}+\ldots$ wobei n meist nicht über 3 hinausgeht. Also ax^3+bx^2+cx+d oder ax^2+bx+c
Allgemein kann dabei folgende Aussage gemacht werden:

kommt von	**geht nach**	**höchster Exponent ist**	**Vorzeichen der höchsten Potenz**
links oben	rechts oben	gerade	positiv
links unten	rechts unten	gerade	negativ
links unten	rechts oben	ungerade	positiv
links oben	rechts unten	ungerade	negativ

Speziell bei quadratischen Funktionen:

Nullstellen: Wenn Nullstellen von quadratischen Funktionen gesucht werden sollen, dann am besten mit der abc-Formel. Ist der sicherste Weg, wenn auch nicht immer der kürzeste.

Für $ax^2+bx+c=0$ sind die Lösungen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

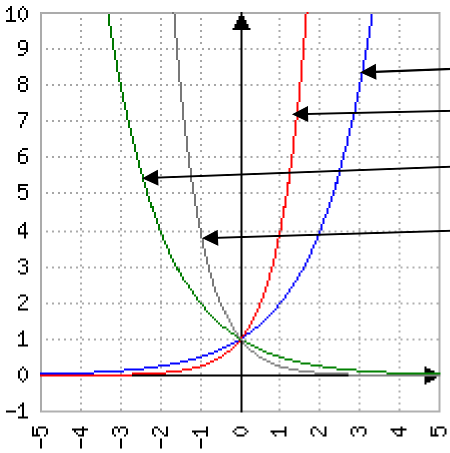
Bei $b^2-4ac > 0$ gibt es zwei Lösungen, wenn $b^2-4ac=0$ genau eine, sonst keine.

Oft kann man durch eine binomische Formel oder, wenn c=0 und man ein x ausklammern kann (dann ist x=0 eine Nullstelle), schneller ans Ziel kommen.

Wenn a= 1 dann auch oft durch „Hinsehen".
$x^2+bx+c = 0 = (x+r)(x+s)$ Ausmultiplizieren gibt $x^2+(r+s)b+r\cdot s$ Welche Zahlen r, s ergeben addiert b und multipliziert c?
Lösungen sind dann –r und –s
Beispiel x^2+2x-8 : $r+s=2$, $r\cdot s=-8$ -> : Teiler der -8 durchprobieren und man erhält r=-2, s=4 somit $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)=0$ mit den Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -4$ (Ein Produkt ist Null wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist, also hier x-2=0 oder x+4=0).
Dass die Lösungen hier ganze Zahlen sind ist natürlich ein Spezialfall, kommt aber bei diesem Aufgabentyp oft vor.

Exponentialfunktionen
Alle Graphen der (nicht verschobenen) Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt (0|1), da $a^0 = 1$.

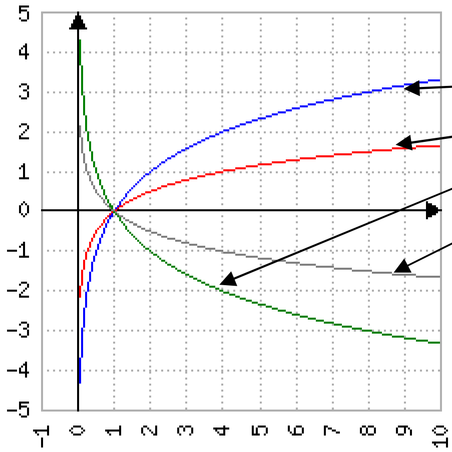
a>1: Streng monoton wachsend
0<a<1: streng monoton fallend
Bei negativen Werten ist der Graph an der x-Achse gespiegelt.
a^x an der Y-Achse gespiegelt gibt $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ (siehe Beispiele unten)



Beispiele:
blau: $f(x)=2^x$
rot: $g(x) = 4^x$
grün: $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
grau: $i(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Logarithmusfunktionen

Man erhält sie, wenn man die Exponentialfunktionen an der Winkelhalbierenden spiegelt



Beispiele:

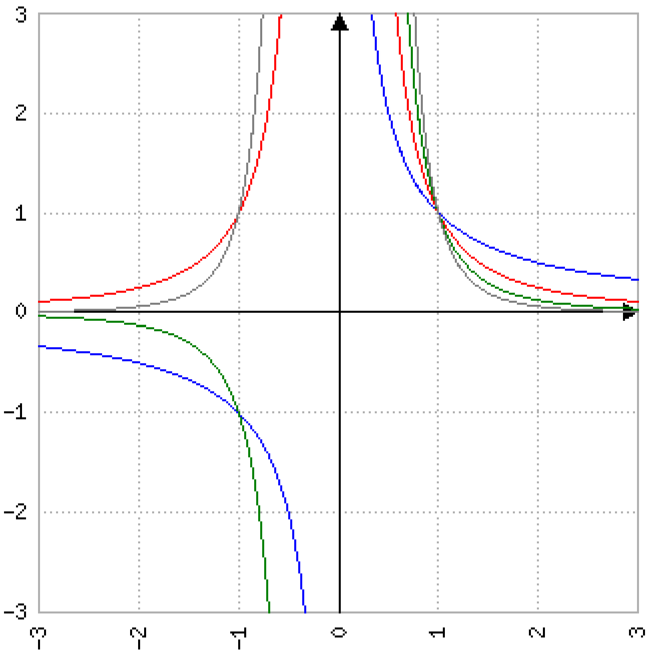
blau: f(x)=$\log_2 x$

rot: g(x) = $\log_4 x$

grün: h(x) = $\log_{\frac{1}{2}} x$

grau: i(x) $\log_{\frac{1}{4}} x$

Potenzfunktion mit negativem Exponenten -> 1/x



blau: f(x) = $\frac{1}{x}$

rot: g(x) = $\frac{1}{x^2}$

grün: h(x) = $\frac{1}{x^3}$

grau: i(x) = $\frac{1}{x^4}$

Bei geraden Exponenten liegen beide Kurventeile oben, bei ungeraden oben rechts und unten links

Generelle Hinweise zu allen Funktionstypen:

Folgende Potenzen sollte man immer direkt im Kopf haben:

$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ (für x≠ 0) und $x^{\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt[n]{x}$

Immer auf die Skalierung der Achsen achten, diese muss nicht unbedingt bei beiden Achsen gleich sein.

Wenn zwei Funktionen vom gleichen Type sind und man Streckfaktoren oder Verschiebungen suchen muss um zwischen zwei Graphen zu unterscheiden:
Einfach zu berechnende Punkte bestimmen, z. B. x=0, x=1, x=-1 und dafür den Funktionswert ermitteln.

Schnittpunkte zweier Graphen f(x) und g(x):

Im Schnittpunkt sind die beiden Gleichungen gleichzeitig erfüllt, also einfach beide Gleichungen gleichsetzen f(x)=g(x) und nach x auflösen. Den so erhaltenen x-Wert in eine beliebige der beiden Funktionen f(x) oder g(x) einsetzen und man bekommt den y-Wert.

Funktionsgleichung anhand gegebener Punkte bestimmen:

Einfach die Punkte in die Gleichung einsetzen und dann das Gleichungssystem lösen. Eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und dann diese in die andere Gleichung einsetzen. Diese hängt dann nur noch von einer Variablen ab und kann gelöst werden. Dann das Ergebnis wieder in die andere Gleichung einsetzen um damit die noch fehlende Variablen zu bestimmen.

Man braucht immer soviel Punkte wie Unbekannte (z. B. Gerade y=mx+b : 2 Punkte, Exponentialfunktion $y=k\cdot a^x$: 2 Punkte, quadratische Gleichung: ax^2+bx+c : 3 Punkte, oft sind hier nur zwei Punkte gegeben und der dritte wird indirekt im Text gegeben, z.B. „Normalparabel“, dann ist der Koordinatenursprung auch ein Punkt des Graphen)

Bei allen Texten immer genau auf die Wortwahl achten:

„Eine Nullstelle“ (hier ist eine, es kann noch mehr geben)

„Genau eine Nullstelle“ (nur diese eine, es gibt keine weiteren)

Wenn man irgendwo bei einer Vereinfachung einer Gleichung durch x teilen möchte:

Die ist nur möglich wenn sichergestellt ist, dass x ungleich 0 ist, sonst ist dies nicht möglich und man muss eine Fallunterscheidung machen.

B) Zinseszinsen

Standardformel

$$K_n = K_0 * \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

Wobei n die Anzahl der Zeiteinheiten ist in denen verzinst wird (normalerweise Jahre). K_0 ist das Anfangskapital und K_n das Kapital nach n Jahren (Zeiteinheiten). Das p ist der Prozentsatz und wird somit direkt so eingegeben. Bei 7% ist p=7 und nicht 1,07 oder ähnliches.

Es wird vorausgesetzt, dass während der Laufzeit KEIN Kapital abgehoben wird.

Es gibt 4 Variablen in der Formel und somit 4 Fragetypen

B1: Welches Kapital habe ich nach n Jahren?

➔ K_0, p und n in die Formel eingeben, ausrechnen, fertig

B2: Welches Anfangskapital benötige ich um bei p% und n Jahren ein Kapital von x€ zu erhalten?

-> Werte für p und n einsetzen, dann nach K_0 umformen, fertig

B3: Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt (oder einen anderen gegebenen Betrag erreicht)?

Das möchte ich hier am Beispiel (p=5 und der Betrag soll sich verdoppeln) einmal vorrechnen:

K_n soll $2 \cdot K_0$ sein, die Klammer vereinfacht sich zu $1{,}05^n$ und wir erhalten

$2 * K_0 = K_0 * 1{,}05^n$. Das K_0 kürzt sich heraus und man braucht nur noch $1{,}05^n = 2$ zu lösen. Dazu braucht man den Logarithmus zur Basis 1,05 von 2. Auf GTR ist dies oft direkt lösbar, für normale Taschenrechner nutzt man die Beziehung

$\log_b a = \frac{\log_x a}{\log_x b}$, (was man sich leicht merken kann: b steht unten = Basis). Das x kann dabei jede beliebige Basis sein, am besten der Zehnerlogarithmus da dieser auf fast jedem Taschenrechner verfügbar ist.

Alternativ dazu kann man es auf die folgende Weise berechnen (was auf die Herleitung der obigen Formel herausläuft)

$2 = 1{,}05^n$. Ich nehme auf beiden Seiten den Zehnerlogarithmus

$\log_{10} 2 = \log_{10} 1{,}05^n$ = (3. Logarithmusgesetz) n * $\log_{10} 1{,}05$, nach n auflösen ergibt:

$$n = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1{,}05}$$

Typische Fangfrage: Herr A hat x€ angelegt, Frau B doppelt soviel (oder generell einen höheren Betrag y€). Beide haben den gleichen Zinssatz und gleiche Laufzeit. Welcher Betrag verdoppelt sich eher ? Bei gleichem Zinssatz und gleicher Laufzeit verdoppeln sich ALLE Kapitale nach der gleichen Zeit. Wie oben gesehen ist es NICHT vom Kapital abhängig (K_0 kürzt sich raus).

B4: Welchen Zinssatz benötige ich damit sich das Kapital in n Jahren auf einen Betrag K_n erhöht ?

K_0 und K_n eingeben und dann die n-te Wurzel berechnen

$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = \left(\frac{100 + p}{100}\right)$$

Den erhaltenen Wert in eine Prozentzahl umformen (mal 100 und dann minus 100), z.B. 1,07 ergibt 7%

C) Flächen- und Volumenberechnung

Flächen: Die meist komplizierte Fläche in Teilflächen unterteilen, die man mit bekannten Formeln einfach berechnen kann (Dreiecke, Rechtecke, Parallelogramme, Kreise) und dann alles aufaddieren. Manchmal müssen erst irgendwelche fehlenden Seiten noch bestimmt werden. Das kann bei rechtwinkligen Dreiecken meist mit Pythagoras oder den trigonometrischen Funktionen (Sinus, Kosinus, Tangens) geschehen, bei anderen Dreiecken versuchen in rechtwinklige Dreiecke aufzuteilen oder gegebenenfalls auch über die Strahlensätze. (vor der Klassenarbeit nochmals anschauen)

Sinus- und Kosinussatz sollte man auch kennen (Tafelwerk Seite 36). Diese Sätze gelten bei allen Dreiecken, der Sinus, Kosinus und Tangens nur bei rechtwinkligen.

Bei Rechnungen mit den trigonometrischen Funktionen immer den Taschenrechner richtig einstellen. (Normalfall: Bei Dreiecksberechnungen meist im Gradmaß (DEG), bei Kreisbewegungen oft auch in Bogenmaß (RAD))

Volumen: Oft kann man einfach das Volumen über Grundfläche mal Höhe (oder Tiefe) berechnen. Bei anderen Körpern wie z.B. Prismen oder Kegeln in die Formelsammlung schauen (Am besten schon vorher mit einen Lesezeichen die entsprechenden Seiten markieren)

Teile von Körpern oder Flächen kann man oft über Verhältnisse berechnen, z.B. ein Kreissegment von 200° ist der $\frac{200}{360}$-te Teil des kompletten Kreises.

Zur Berechnung des Gewichts benutzt man die Formel $\rho = \frac{m}{V}$ $oder\ Dichte = \frac{Masse}{Volumen}$, die Dichte ist in der Aufgabenstellung gegeben.

Bei Umrechnen von Flächen und Volumen daran denken, dass:

1 cm = 10 mm, 1 cm^2 = 100 mm^2, 1 cm^3 = 1000 mm^3

1 Liter = 1 dm^3

Bei Kreisberechnungen nicht den Radius mit dem Durchmesser verwechseln.

D) Wahrscheinlichkeitsrechnung

Am besten immer über den Wahrscheinlichkeitsbaum, zumindest mal kurz skizzieren um einen Überblick zu erhalten.

Bei einigen Berechnungen mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Ereignis eintritt ist es einfacher zu berechnen mit welcher Wahrscheinlichkeit es NICHT eintritt und dann:

Wahrscheinlichkeit (eintreten) = 1- Wahrscheinlichkeit (nicht eintreten)